ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.17 1986

УДК 514.75

ПРОСТРАНСТВО ОРИЕНТИРОВАННЫХ ПРЯМЫХ ПРОСТРАНСТВА ЛОБАЧЕВСКОГО

С.В.Ведерников

В работе методом статьи [2] изучаются симметрические пространства, порожденные группой $SL(2,C)$, действующей в $M(2,C)$ (линейном пространстве квадратичных матриц второго порядка над полем комплексных чисел) при помощи отображения

$$\alpha: \ SL(2,C)\times M(2,C)\to M(2,C): x\to axa^{-1}.$$

Доказывается, что с точностью до изоморфизма имеется только одно симметрическое пространство, содержащееся в данном, и оно совпадает с пространством ориентированных прямых пространства Лобачевского. Определены полиномиальные морфизмы этого пространства и его основные инварианты.

1. Изучим области симметрии в $M(2,C)$ с основной группой $SL(2,C)$ и автоморфизм $\varphi=\mathrm{Id}$. В этом случае [2] область симметрии получается как решение системы $x^2=\sigma E$, т.е. область симметрии определяется в виде многообразия $S=\{x\in M(2,C)\,|\,x^2=\sigma E\}$. Легко видеть, что S - линейное пространство и поэтому из $x\in S$, $y\in S$ следует, что

$$x^2=\sigma_0 E;\ y^2=\sigma_1 E;\ (x+y)^2=\sigma E\Rightarrow xy+yx=\tau E,\ tr(xy)=\tau.$$

В результате получаем основное тождество для элементов S: $$xy+yx=tr(xy)E.$$

Орбиты в S следует определять по общему правилу "приведения матрицы оператора к простейшему виду". В случае $tr\,x=0$ матрицы имеют следующий простейший вид: при $\lambda\neq 0$ $x=\lambda a\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}a^{-1}$;

при $\lambda=0$ $x=a\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}a^{-1}$

(случай $x=0$ надо исключить).

Так как отображение $x\to\lambda x$ есть изоморфизм G-пространств, то с точностью до изоморфизма мы должны изучать два следующих однородных пространства:

$$\mathcal{X}=\{x=a\varepsilon a^{-1}/a\in SL(2,C),\quad \varepsilon=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\};$$

$$\mathcal{X}_0=\{x_0=a\varepsilon_0 a^{-1}/a\in SL(2,C),\quad \varepsilon_0=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\},$$

где $\mathcal{X}_0$ не является симметрическим пространством, так как ε_0 - вырожденная матрица. Тогда $S=\{0\}\cup\lambda\mathcal{X}\cup\mathcal{X}_0$.

Покажем, что $\mathcal{X}$ изоморфно пространству ориентированных прямых пространства Лобачевского. Для этого достаточно подсчитать стационарную группу элемента $\varepsilon\in\mathcal{X}$, т.е. подгруппу

$$H=\{h\in SL(2,C)/h\varepsilon h^{-1}=\varepsilon\}=\{\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}/\alpha\beta=1\},$$

$$H\subseteq SL(2,C),$$

и сравнить ее со стационарной группой H_1 прямой $x_2=x_1=0$ пространства Лобачевского [1]. Оказывается, что пространство S можно рассматривать как пространство ориентированных прямых пространства Лобачевского, т.е. каждую прямую пространства Лобачевского будем здесь рассматривать как пару ориентированных прямых [3].

2. Определим теперь все полиномиальные морфизмы в S. Так как $x^2=\sigma_1 E$, $y^2=\sigma_2 E$ и $xy+yx=\tau E$, то полиномиальный морфизм от двух переменных имеет следующий вид:

$$\rho:\ \mathcal{X}\times\mathcal{X}\to M(2),\quad (x,y)\to\alpha xy+\beta x+\gamma y+\delta E,$$

где коэффициенты есть функции инварианта

$$f:\ \mathcal{X}\times\mathcal{X}\to c=(x,y)\to tr(x,y)=\tau e^{i\varphi}=\alpha+i\beta.$$

Этим инвариантом определяются два действительных инварианта пары ориентированных прямых. При этом одну из прямых (в силу однородности пространства $\mathcal{X}$) можно фиксировать, положив $y=\varepsilon_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, и в этом случае

$$f(x,y)=tr(\mathcal{X}\varepsilon_0)=tr\left\{\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&-x_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\}=2x_1\ ;\ x_1\in C.$$

Отметим случай, когда прямые лежат в плоскости Лобачевского, отличающийся тем, что матрица $\mathcal{X}$ -действительная. В этом и только в этом случае $tr\,(xy)\in\mathbb{R}$. Это и будет необходимым и достаточным условием принадлежности двух ориентированных прямых одной плоскости пространства Лобачевского.

Оказывается, полученный нами инвариант, вообще говоря, точный. Однако точность имеет место только при ограничении этого инварианта на множестве пар непараллельных прямых (для параллельных прямых он равен единице). Доказательство точности основано на биективности отображения $\tilde{f}: \mathcal{X}/_H \to \mathbb{R}$,т.е. два элемента x и x_1 ,имеющие одинаковые значения инварианта $(x,y_0)=$ $=(x_1,y_0)$ (y_0 фиксируется) , могут быть совмещены с помощью преобразования группы.

Библиографический список

1. Г е л ь ф а н д И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М.: Наука ,1962.

2. В е д е р н и к о в С.В. Специальные морфизмы G -пространств. Проблемы геометрии / ВИНИТИ АН СССР.- М., 1975. Т.7. С.49-68.

3. В е д е р н и к о в В.И., Ведерников С.В. Области симметрических пространств, порожденных группой $SL(2,C)$ // Тез. докл. Всесоюзн. конф. по неевклидовой геометрии "150 лет геометрии Лобачевского".-Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1976. С.41.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.17 1986

УДК 514.75

О СЕМЕЙСТВЕ СРЕДНИХ НОРМАЛЕЙ ПОВЕРХНОСТИ $V_2\subset E_5$.

А.С.Г р и ц а н с

В работе изучаются свойства двухпараметрического семейства средних нормалей поверхности $V_2\subset E_5$.

1. Отнесем поверхность $V_2\subset E_5$ к подвижному реперу $\{x,\vec{e}_i,\vec{e}_\alpha\}$ $(i,j,k=1,2;\ \alpha,\beta=3,4,5)$, где орты $\vec{e}_i$ принадлежат касательному пространству $T_2(x)$ к поверхности V_2 в точке $x\in V_2$,а векторы $\vec{e}_\alpha$ образуют ортонормированный базис нормальной плоскости $N_3(x)$ поверхности V_2.

Деривационные формулы репера имеют вид

$$d\vec{x}=\omega^i\vec{e}_i\ ,\ d\vec{e}_i=\omega_i^j\vec{e}_j+\omega_i^\alpha\vec{e}_\alpha\ ,\ d\vec{e}_\alpha=\omega_\alpha^i\vec{e}_i+\omega_\alpha^\beta\vec{e}_\beta\ .$$

Продолжая систему уравнений $\omega^\alpha=0$ нашей поверхности, получим:

$$\omega_i^\alpha=b_{ij}^\alpha\omega^j,\ \ b_{ij}^\alpha=b_{ji}^\alpha\ . \qquad (1)$$

Произведем канонизацию репера: векторы $\vec{e}_i$ направим по касательным к линиям кривизны относительно средней нормали, $\vec{e}_5$, $\vec{e}_3$ -параллельно средней нормали $[x,\vec{M}]$ и нормали $[x,\vec{b}_{12}]$ соответственно, где $\vec{b}_{12}=b_{12}^\alpha\vec{e}_\alpha$, а вектор $\vec{e}_4$-ортогонально ко всем предыдущим векторам [1]. В дальнейшем будем предполагать, что V_2 не минимальна и главная нормаль поверхности V_2 имеет максимально возможную размерность 3.

Канонизация репера налагает следующие условия на компоненты вторых тензоров:

$$b_{12}^3\neq 0,\ b_{11}^4\neq 0,\ b_{12}^4=b_{12}^5=0;\ b_{11}^3+b_{22}^3=b_{11}^4+b_{22}^4=0,\ b_{11}^5+b_{22}^5\neq 0. \ (2)$$

Дифференцируя тождество $\vec{e}_J\vec{e}_{\mathcal{J}}=\delta_{J\mathcal{J}}$ $(J,\mathcal{J}=\overline{1,5})$,получим